

Fiche de TD n° 5

Loi exponentielle - loi de Poisson

1° - La loi exponentielle

Vous vous intéressez au temps nécessaire, noté T , pour observer l'apparition d'un phénomène. Les exemples typiques sont : le temps jusqu'à la désintégration d'un atome radioactif, le temps d'attente à un standard téléphonique, le temps d'accès à un serveur, la durée de vie d'un individu...

1. On suppose que : $\forall s, t \geq 0, P(T > s + t | T > s)$ est indépendant de s .
Après avoir commenté et discuté soigneusement de la pertinence de cette hypothèse dans chacun des cas précédents, montrer qu'alors $\exists \theta$ tel que $P(T > t) = \theta^t$ pour $t > 0$.
2. Montrer ensuite qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$.
En déduire que T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Donner alors la densité de T , ainsi que sa médiane. Expliquez pourquoi dans le contexte d'une substance radioactive la médiane est appelée demi-vie.

2° - Loi de Poisson

On rappelle qu'une variable aléatoire N est de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

On s'intéresse au nombre d'apparitions d'un phénomène au cours du temps. On note N_t le nombre de fois où le phénomène est apparu entre les instants 0 et t et on suppose que N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

1. Dessiner un exemple de fonction $t > 0 \mapsto N_t$
2. On note T le temps qu'il faut attendre pour voir apparaître le phénomène pour la première fois. Quel lien existe-t-il entre les événements $\{N_t > 0\}$ et $\{T < t\}$? En déduire la loi de la v.a. T .