telecom
Saint-Etienne

Probabilités et Statistiques

Année 2009/2010

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours °4

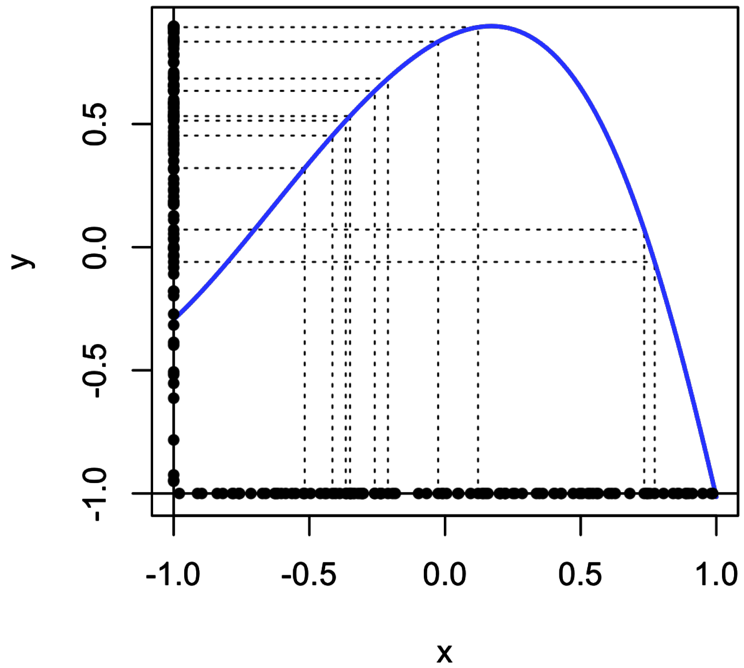
Quelques procédés de simulation

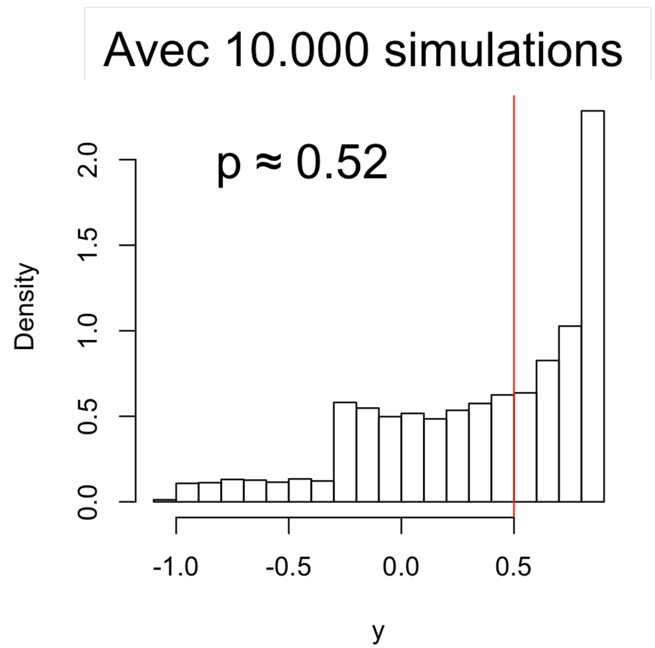
Pourquoi simuler ?

Un cas d'école

Soit U uniforme sur [-1,1]. Calculer :

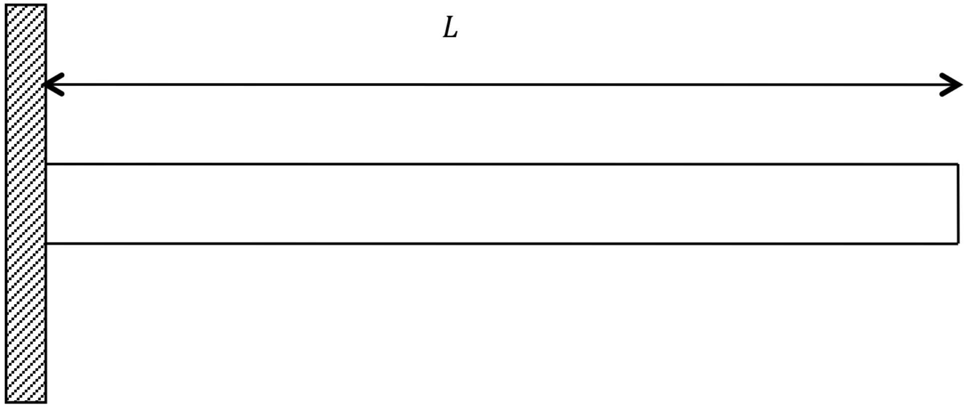
- P($U^2 < 0.5$) ?
- Et ça : P($2*\cos(U^2+1)*\text{atan}(\exp(U)) < 0.5$) ?

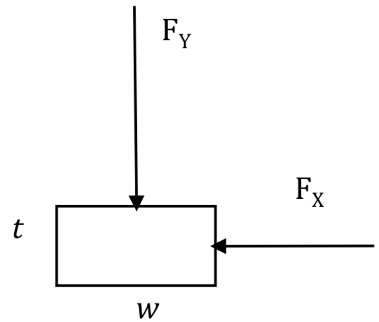




Pourquoi simuler ?

- Un problème réel (*avec la participation de V. Picheny*).
  Etude de la résistance d'une poutre soumise à des contraintes de chargement:
  - Force verticale F_y
  - Force horizontale F_x





Pourquoi simuler ?

- Déplacement maximum (à l'extrémité de la poutre)

$$D_{\max} = \frac{4L^3}{Ewt}\sqrt{\left(\frac{F_X}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{F_Y}{w^2}\right)^2}$$

- Défaillance : D_{max} dépasse un seuil admissible

  $D_{max} \geq 45$ mm

Pourquoi simuler ?

- Volonté de prendre en compte les incertitudes :
  - Processus de fabrication (t, w, E)
  - Méconnaissance du chargement (F_x, F_y)

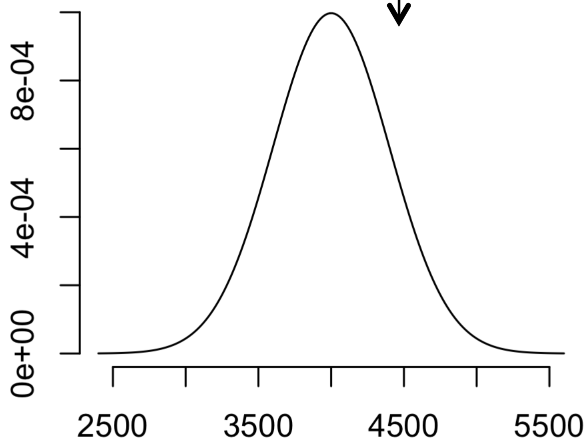
- Conséquence :
  - t, w, E, F_x, F_y sont des variables aléatoires

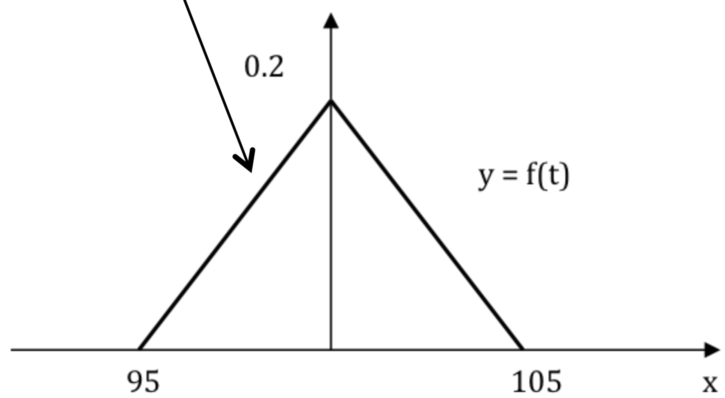
- Réponse en terme de probabilité
  - Calcul de $\mathbf{P(\ \{D_{max} \geq 45\}\ )}$

Pourquoi simuler ?

- Choix des lois des variables du problème (par des experts)

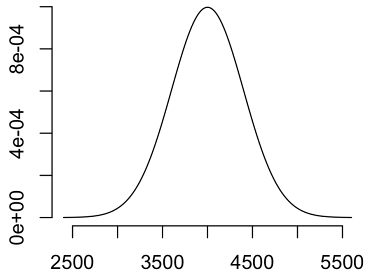
Variable	F_X (N)	F_Y (N)	*w* (mm)	*t* (mm)	*E* (MPa)
Loi	Normale	Normale	Triangulaire	Triangulaire	Normale
Paramètres	$I = 2000$ $O = 400$	$I = 4000$ $O = 400$	$a = 95$ $b = 105$	$a = 58$ $b = 68$	$I = 210\,000$ $O = 1000$



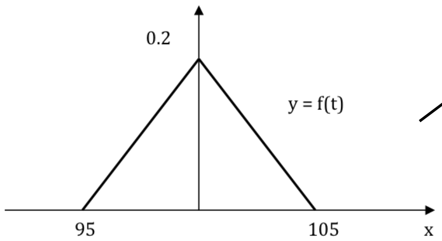


Pourquoi simuler ?

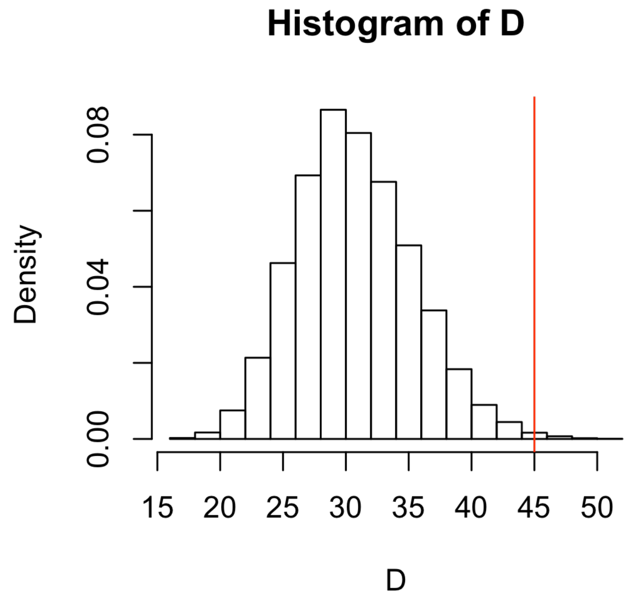
- Réponse au problème



…



$$D_{\max} = \frac{4L^3}{Ewt}\sqrt{\left(\frac{F_X}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{F_Y}{w^2}\right)^2}$$



$p \approx 0.0034$

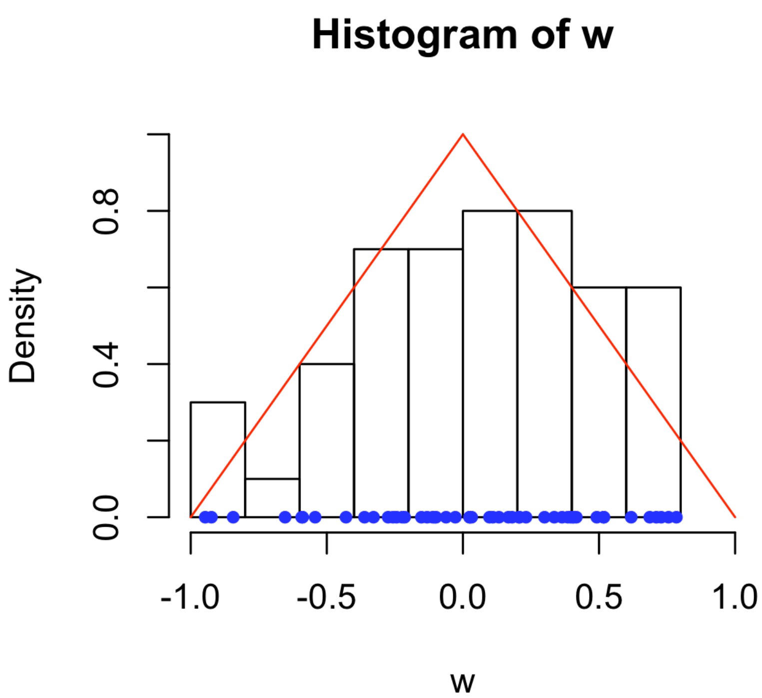
Remarque : hypothèse cachée d'indépendance…

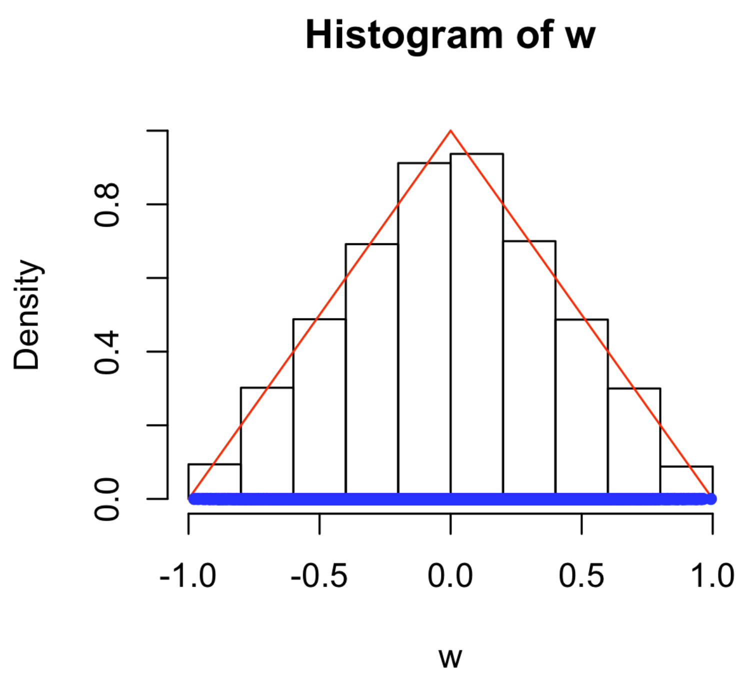
Objectif du cours

COMMENT simuler

Exemples

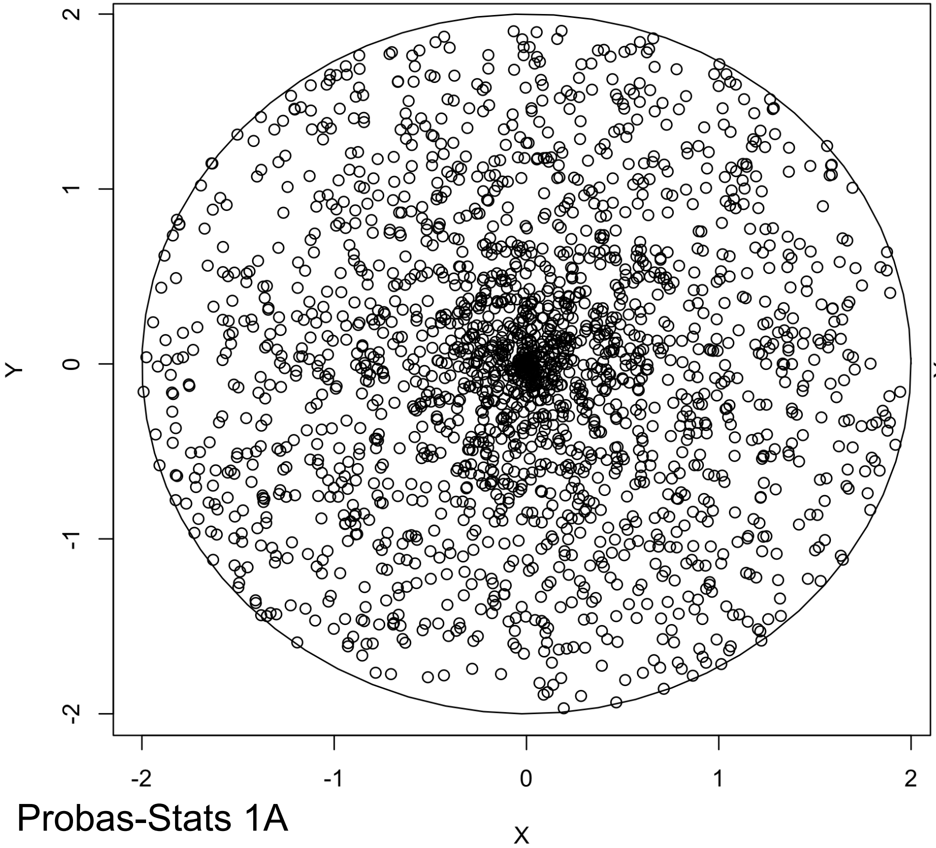
- Simulation selon une loi à densité triangulaire

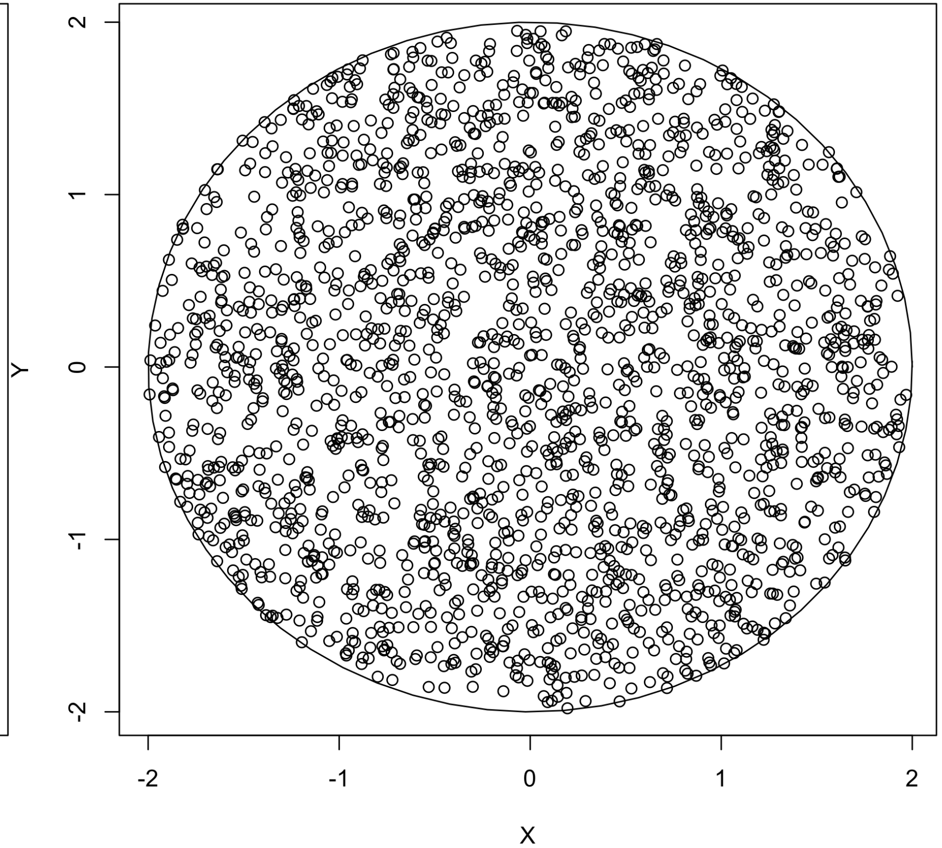




Exemples

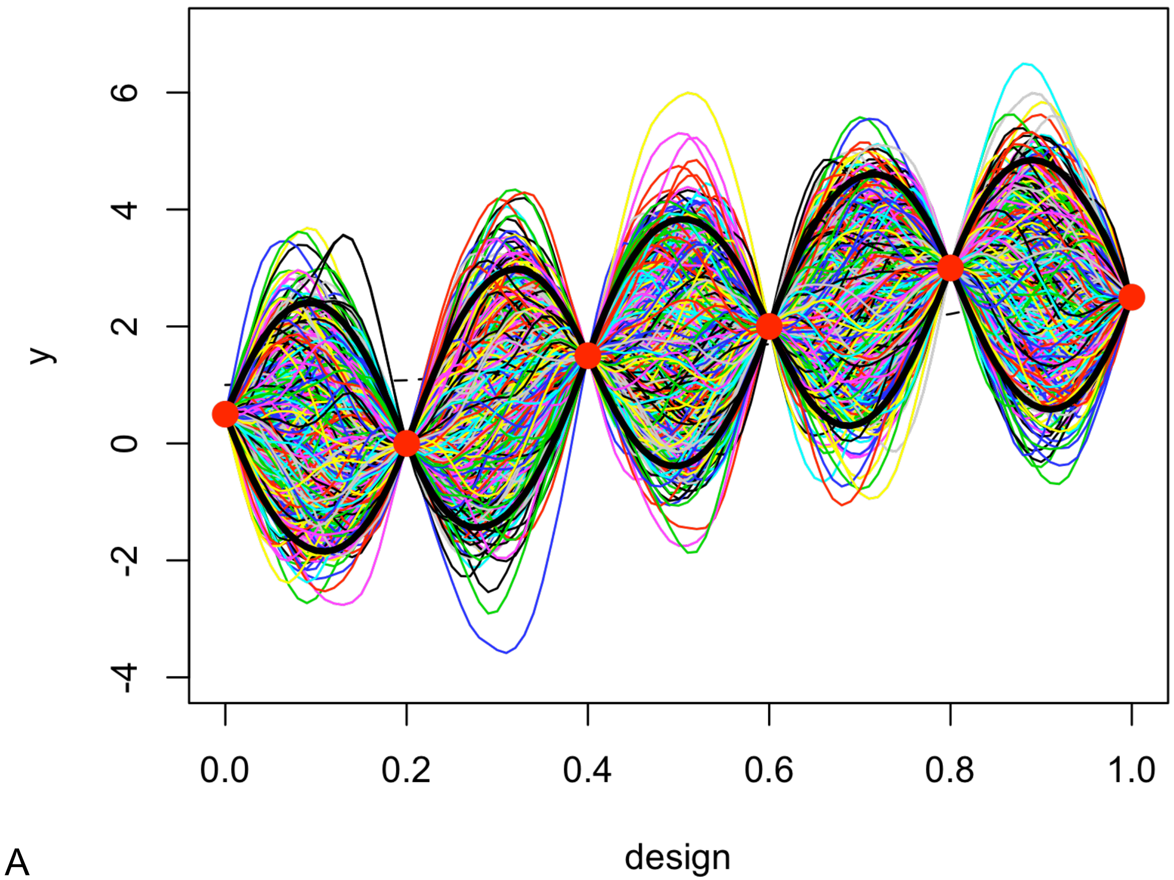
- Simulation dans un disque …





Exemples

- Simulation selon… oups, pas cette année !



Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- *Exemple*

  Ω = {population française}, $\Im = \wp(\Omega)$, P=proba. uniforme

  A = {gagner plus de 30k€ / an}

  B = {être une femme}

  On choisit au hasard uniformément un individu dans Ω.

  Quelle est la probabilité pour qu'il gagne plus de 30 k€ ?

  Sachant qu'il s'agit d'une femme, quelle est la probabilité pour qu'il (elle) gagne plus de 30k€ ?

Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- Propriété / définition
  Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors :
  L'application $A \to P(A \cap B) / P(B)$ *est une probabilité sur B*

  Vocabulaire : c'est la probabilité conditionnelle de A sachant B
  Notation : $P(A \mid B)$

telecom Saint-Etienne

Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- Définition / propriété - Indépendance

  A et B sont indépendants ssi $\boldsymbol{P(A|B)=P(A)}$ *ssi* $\boldsymbol{P(B|A)=P(B)}$

  ssi $\boldsymbol{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$

  <u>Remarques :</u>

  - Symétrie dans la notion d'indépendance
  - La dernière équivalence est valable si P(A)=0 ou P(B)=0

- *Exemple*
  - *Avec 1 dé : A = {6 au 1er lancer}, B={6 au second lancer}*

La méthode du rejet

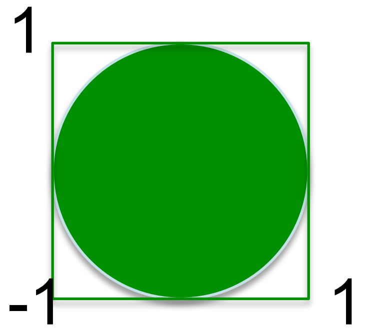
- Exemple. Simulation uniforme dans le disque unité.
  - Comment simuler uniformément dans le carré $[-1, 1]^2$?

    Vérifier le résultat en montrant que $P((U_1,U_2) \in A) = \text{aire}(A)/\text{aire}(C)$ lorsque A est un rectangle quelconque

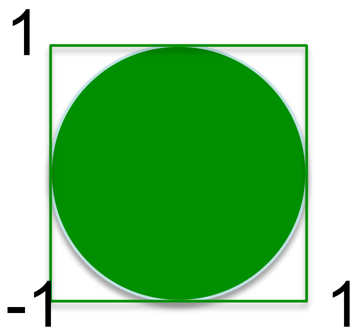
  - En déduire comment simuler uniformément dans D(0, 1)

    En ne gardant (U_1,U_2) que s'il est dans D, que calcule-t-on?

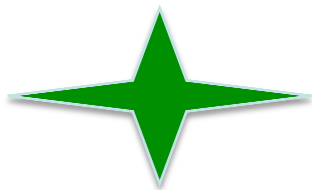
    Vérifier en calculant $P((U_1,U_2) \in A \mid (U_1,U_2) \in D)$ pour $A \subset D$



La méthode du rejet



- Généralisation : c'est la méthode du rejet.
- Peut-on l'utiliser sur l'étoile ci-dessous ? Que dire de la rapidité de la méthode ?



Simulation selon une loi

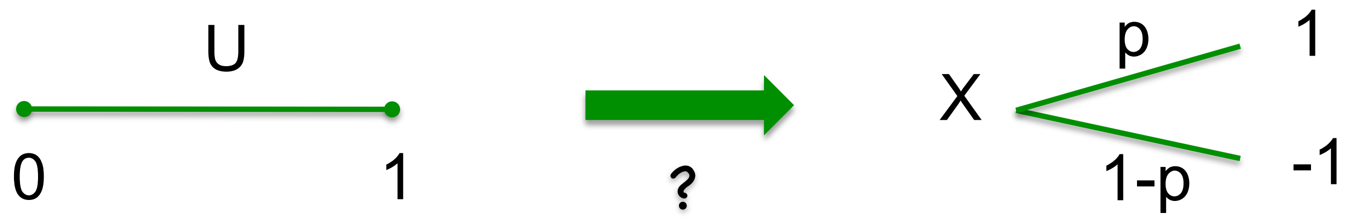
- Faisons l'hypothèse qu'un ordinateur peut simuler un nombre uniformément* entre 0 et 1. Comment faire pour simuler un nombre issu d'une loi de probabilité fixée ?

- *En termes mathématiques* :
  - On dispose d'une v.a. U de loi uniforme sur $\Omega=[0,1]$.
  - Soit une loi μ définie par sa fonction de répartition F. Peut-on construire à partir de U une variable aléatoire X tel que $F_X = F$? (F_X : fonction de répartition de X)

* *On parle de générateur pseudo-aléatoires, qui se basent par ex. sur des relations de congruences.*

Premiers exemples en discret

- Loi de type Bernoulli B(p) [pile ou face]
  Résoudre le problème précédent pour la loi B(p) sur {-1,1}*



- Généralisation et interprétation
  - Généraliser à une loi discrète de support fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
  - Interpréter le résultat graphiquement au moyen de F
    Indication : sur quel axe représenter $U(\omega)$?

* *Si le support de la loi est {-1,1}, on parle aussi de loi de Rademacher*

Cas d’une loi à densité

- Supposons que μ admette la densité f
  - A l’aide de l’interprétation précédente, proposer une méthode de simulation de la loi μ.

    Exemple. Une loi utilisée pour modéliser une durée de vie est la loi exp(λ) : $P(X \geq x) = \exp(-\lambda x)$. Comment simuler selon cette loi ?

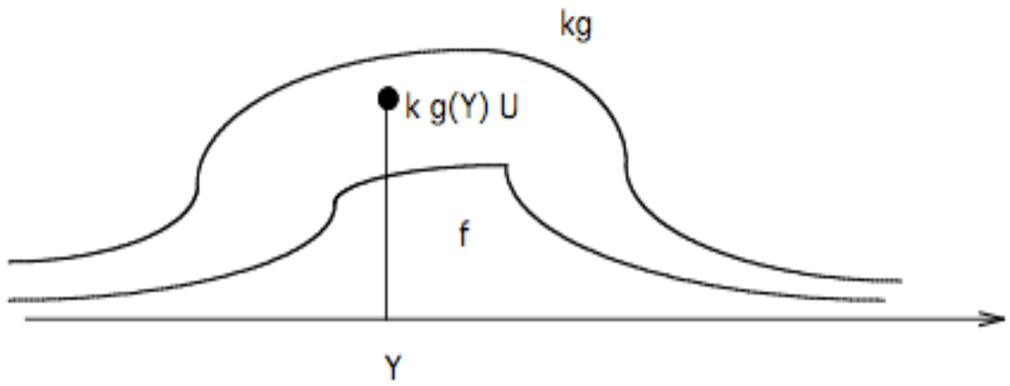
  - C’est la méthode d’inversion. Quelles sont ses limites ? Donner un ex. où elle n’est pas applicable facilement.

  - Interpréter la méthode en termes de quantiles: le quantile d’ordre α est « le » nombre q(α) tel que $P(X < q(\alpha)) = \alpha$

telecom Saint-Etienne

Simulation d'une loi à densité par rejet

- Simuler U unif. sur [0,1]
- Simuler Y de densité g
- Poser Z = kg(Y)U
- Si Z < f(Y) poser V=Y, sinon recommencer



Alors V est de densité f.

<u>Schéma de preuve</u> : (vous pouvez faire sans mal : (ii) et (iii))
(i) les points (Y, Z) sont répartis uniformément sous la courbe kg
(ii) les points (V,Z) sont répartis uniformément sous la courbe f
(iii) V admet la densité f.

Un cas particulier

- Simulation selon la loi normale.
  - Proposition (Box-Muller) [méthode polaire].

    Soient U et V deux v.a. uniformes sur [0,1] et indépendantes.

    Alors $X = \sqrt{[-2\log(U)]} \times \cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{[-2\log(U)]} \times \sin(2\pi V)$ sont deux v.a. indépendantes de loi N(0,1)

  - En pratique, cette méthode est lente et imprécise. On peut utiliser la méthode du rejet (voir polycopié page 74), éventuellement couplée avec une méthode de « polygonalisation » (voir [Bercu, Chafaï, 2007]).

telecom Saint-Etienne

Exercice 1

- Un autre procédé de simulation uniforme dans un disque.

  Idée : simuler l'angle W uniformément sur $[0, 2\pi]$, et simuler le rayon V selon une loi F, indépendamment de W.

1. Ca ne marche pas si F est la loi uniforme : pourquoi ?
2. Que faut-il prendre pour F ?

Indication : *calculer de 2 façons* $P(V < r, W < \theta)$*, et montrer que* $F(r) = (r/R)^2$ *(avec R le rayon du disque).*

Exercice 2

- Simulation selon une loi triangulaire

1. Déduire du cours un procédé de simulation selon une loi à densité triangulaire. Faire tous les calculs. Tester votre procédé.

2. En s'inspirant du cas de 2 dés, et en cherchant la loi de la somme, proposer une seconde méthode. Tester empiriquement votre procédé. (Il sera justifié plus tard).

Pour aller + loin

- Polycopié, chapitre 5 : méthode du rejet, simulation selon la loi binomiale B(n,p), …

- Bercu B., Chafaï D. (2007), *Modélisation stochastique et simulation*, Collection Mathématiques appliquées pour le master/SMAI*, ed. Dunod.

* *Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles*.