

Fiche de TD n° 1

Exercice 1 : Anniversaires

n élèves de TSE sont actuellement présents dans la salle (remplacer n par sa valeur); on désire calculer la probabilité qu'aucun d'entre eux ne soit né le même jour. Donner le modèle probabiliste qui va permettre de répondre à cette question (on négligera les années bissextiles). Calculer alors la probabilité cherchée .

Exercice 2 : Porte-manteaux

Dans une école maternelle, les élèves pendent leurs vêtements aux porte-manteaux situés à l'extérieur de la salle de classe. A l'heure de la récréation, il sortent et choisissent au hasard un vêtement. On désire évaluer la probabilité p qu'au moins l'un d'entre eux soit vêtu de son propre habit.

1) Donner un modèle probabiliste de cette expérience et exprimer dans ce modèle les événements « au moins élève a le bon habit » et « l'élève numéro i a le bon habit ». Quelles relations ensemblistes peut-on établir entre ces évènements ?

2) Etablir une formule donnant la probabilité de la réunion de n événements pas forcément deux à deux disjoints (on commencera par la réunion de 2, 3, ... événements)

3) Utiliser le résultat précédent pour calculer p et examiner le comportement de p lorsque la taille de la classe tend vers l'infini.

Exercice 3 : Graphologue

Un individu se prétend graphologue et annonce qu'il peut, à l'aide de la

seule écriture, déterminer la profession d'une personne. Pour vérifier cela, vous choisissez 25 personnes de professions différentes et faites intervenir le graphologue en lui indiquant la liste des personnes ainsi que la liste des 25 professions représentées.

1) Vous supposez a priori qu'il s'agit d'un charlatan. Expliquez en quoi le modèle probabiliste qui correspond à cette expérience est celui déjà rencontré avec les porte-manteaux :

$\Omega = \Sigma_n$ est l'ensemble des bijections σ de $1, \dots, n$ sur lui-même. P est la probabilité uniforme sur Ω ($\text{card}\Omega = n!$).

2) On rappelle qu'en posant $A = \{\sigma \in \Sigma_n, \exists i/\sigma(i) = i\}$, et en notant $P(\bar{A}) = p_n$, on a :

$$p_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$$

On note N la v. a. qui donne le nombre de bonnes réponses fournies par le graphologue. Comment interpréter p_n à l'aide de N ? Déterminer la loi de N . Qu'obtient-on pour $n \rightarrow +\infty$

3) Expliquez comment l'examen des quantités $P(N \geq k)$ va permettre de vous dire à partir de quel nombre de bonnes réponses vous allez pouvoir faire confiance à cette personne.