Fiche de TD n° 13

Intervalles de confiance

1° - Le problème

On s'intéresse à la durée de vie des ampoules produites par un nouveau fournisseur B. L'ingénieur chargé de la maintenance a suivi un lot de 24 ampoules jusqu'à disparition complète. Il a obtenu les durées de vie suivantes (en jours) :

25,5 - 20,2 - 35,5 - 14,3 - 2,0 - 1,8 - 55,5 - 2,0 - 13,4 - 13,0 - 22,5 - 0,2 - 13,9 - 26,2 47,5 - 1,0 - 51,6 - 13,7 - 18,9 - 25,4 - 1,7 - 12,5 - 15,2 - 1,1

Indicateurs numériques pour ce lot : moyenne = 18,11, écart-type = 16,12.

L'objectif de l'exercice est de donner une estimation de la durée de vie moyenne μ sous la forme d'un intervalle de confiance.

2° - Intervalles de confiance

1. Proposer un intervalle de confiance approché à 95% de la durée de vie moyenne.

   Une étude statistique a permis de montrer que la loi exponentielle est bien adaptée pour modéliser ces durées de vie. Désormais, on fait donc l'hypothèse que les données sont issues de variables aléatoires T_1,..., T_{24} indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

2. On rappelle la propriété suivante (exercice) : « Si X est une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ». On note alors $\bar{T} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} T_i$ l'estimateur naturel de $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

   En déduire un autre intervalle approché au niveau 95%, qui ne fasse intervenir que la moyenne de l'échantillon. Comparer avec le précédent et interpréter.

3. On désire obtenir un intervalle de confiance exact. On rappelle pour cela les deux résultats suivants (démontrer le premier).
   - Si X est de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, λX est de loi $\mathcal{E}(1)$.
   - La somme de n v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$ a pour densité :

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-x}, pour\ x > 0 \tag{1}$$

En déduire un intervalle de confiance exact à 95% de μ. Comparer avec l'intervalle approché de la question précédente.

4. L'entreprise avait l'habitude de travailler avec un fournisseur A, qui produit des ampoules dont la durée moyenne a été estimée à 14,6. En voyant les résultats de l'expérimentation, un technicien s'est exclamé : « 18,11 c'est nettement plus grand que 14,6, donc les ampoules de B sont meilleures ».
   Quel est le principal défaut de ce raisonnement ?
   Pensez-vous qu'il ait raison ici, au vu des intervalles de confiance précédents ?