

Fiche de TD n° 4

Probabilités conditionnelles

1° - Les formules de Bayes. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A, B deux événements.

1. Etablir la formule dite des probabilités composées qui donne $P(A)$ en fonction de $P(A/B)$ et $P(A/B^c)$.
2. Donner une formule, dite formule de Bayes donnant $P(B/A)$ en fonction de $P(A/B)$ et $P(A/B^c)$.
3. Généraliser les deux formules précédentes en remplaçant le couple (B, B^c) par une partition de Ω constituée des événements (B_1, B_2, \dots, B_n) .

2° - Machines et pièces. Dans une usine, on dispose de 3 machines A, B, C fabriquant des pièces mécaniques d'un type déterminé. La machine A assure 25% de la production, la machine B en assure 35% et la machine C en assure 40%. 5% des pièces fabriquées à l'aide de la machine A sont défectueuses. Les pourcentages sont respectivement égaux à 4% et 2% pour les machines B et C. On tire une pièce d'un lot constitué de pièces fabriquées, dans les proportions indiquées, par les machines A, B et C. On constate que cette pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle ait été fabriquée :

- par la machine A
- par la machine B
- par la machine C.

3° - Tests de dépistage. Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique qui se propose d'en déterminer l'efficacité. Il estime pour cela la probabilité α (resp. β) que le test soit positif (resp. négatif) alors que la personne considérée est malade (resp. bien portante) en testant un échantillon de personnes malades (resp. bien portantes) au sein d'une population donnée.

On suppose α et β proches de 1 (par exemple $\alpha = \beta = 0.99$). Proposer des indicateurs d'efficacité du test ; les évaluer.