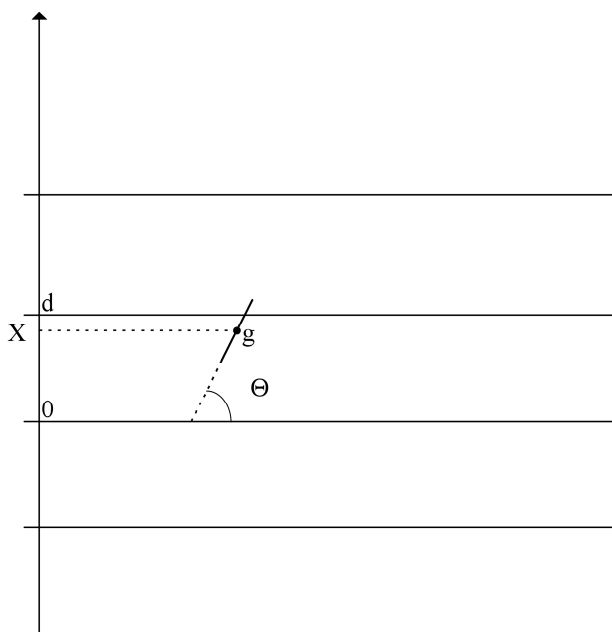


Fiche de TD n° 5

De l'aiguille de Buffon à l'analyse d'images

Le but de ce problème est de montrer comment faire certains types de mesures sur des images par la méthode de Monte Carlo. Nous commencerons par donner un résultat établi par le naturaliste Buffon avant d'aborder des cas plus généraux.

1° - **L'aiguille de Buffon.** On lance une aiguille de longueur L sur un parquet formé de lames parallèles distantes de d et on désire savoir avec quelle probabilité l'aiguille va rencontrer un joint entre deux lames. On suppose que $L < d$ de sorte que l'aiguille ne peut intersecter qu'au plus un joint à la fois. On modélise l'expérience de la façon suivante : on mesure la distance X entre le centre de gravité g de l'aiguille et la lame de parquet inférieure la plus proche puis l'angle Θ entre la direction de l'aiguille et celle des lames de parquet. On suppose que X et Θ sont indépendantes de lois uniformes respectivement sur $[0, d]$ et $[0, \pi]$.



- Lorsque $\Theta = \theta$ est fixé, à quelle condition sur X l'aiguille rencontre-t-elle un joint ?
- En déduire que la probabilité cherchée est de $\frac{2L}{\pi d}$.
- Comment calculer π à partir de ce résultat par simulations successives ?

2° - On "jette" cette fois une courbe polygonale C sur le parquet : C est la réunion de segments S_1, \dots, S_n dont on peut supposer, quitte à les redécouper, qu'ils sont tous de longueur inférieure à d . On pose $E_i = 1$ si S_i rencontre le parquet et $E_i = 0$ sinon.

- Comment s'exprime la variable aléatoire N qui donne le nombre de contacts entre la courbe C et les joints du parquet ?
- En déduire sans calcul que $E(N) = \frac{2L}{\pi d}$, où L est la longueur de C .

3° - On admettra que la formule précédente est encore satisfaite pour une courbe rectifiable quelconque C , de longueur L .

- Donner une justification intuitive de ce résultat.
- Que donne votre formule pour un cercle de diamètre d ? Peut-on obtenir ce résultat directement ?

4° - Comment feriez-vous pour calculer la longueur de l'interface austénite-ferrite de cet acier biphasé (l'austénite est en blanc sur la figure) ?

